heißen <u>Hauptkrümmungsrichtungen</u>.

Beweis: Sei $V_1 \in T_w X$ mit $|V_1| = 1$ minimal,

also
$$\mathrm{II}_w(V_1,V_1) \le \mathrm{II}_w(V,V)/\mathrm{I}_w(V,V)$$

für alle $V \in T_w X - \{0\}$. (Existenz: minimiere $\mathrm{II}_w(V,V)$ auf $|V| = 1$!) Für $|\varepsilon|$ klein genug ist $V_1 + \varepsilon V$, $V \in T_w X$, dann $\neq 0$, d.h.

$$\mathrm{II}_w(V_1,V_1) \le \mathrm{II}_w(V_1+\varepsilon V, V_1+\varepsilon V)/\mathrm{I}_w(V_1+\varepsilon V, V_1+\varepsilon V)$$

$$\Rightarrow \quad \varkappa_1(w)\,\{\mathrm{I}_w(V_1,V_1) + 2\varepsilon\,\mathrm{I}_w(V_1,V) + \varepsilon^2\,\mathrm{I}_w(V,V)\}$$

$$\le \mathrm{II}_w(V_1,V_1) + 2\varepsilon\,\mathrm{II}_w(V_1,V) + \varepsilon^2\,\mathrm{II}_w(V,V)$$

Es ist $\mathrm{II}_w(V_1,V_1) =: \varkappa_1$, $\mathrm{I}_w(V_1,V_1) = 1$, also bekommt man $(\varkappa_1 = \varkappa_1(w))$

$$2\varepsilon\varkappa_1\,\mathrm{I}_w(V_1,V) + \varepsilon^2\varkappa_1\,\mathrm{I}_w(V,V) \le$$

$$2\varepsilon\,\mathrm{II}_w(V_1,V) + \varepsilon^2\,\mathrm{II}_w(V,V).$$

Dividiert man durch $\varepsilon > 0$ und lässt ε gegen 0 gehen, so folgt

$$2\varkappa_1 \, \mathrm{I}_w(V_1, V) \leq 2\, \mathrm{II}_w(V_1, V) \implies$$

$$\varkappa_1 \, V_1 \cdot V \leq S_w(V_1) \cdot V .$$

Dies gilt für jeden Vektor V, m.a.W.: $S_w(V_1) = \varkappa_1(w) V_1$.

$\varkappa_1(w)$ ist Eigenwert der Weingarten-Abbildung mit zugehörigem Eigenvektor V_1. Entsprechend rechnet man nach, dass auch $\varkappa_2(w)$ Eigenwert von S_w sein muss. Nun ist S_w selbstadjungiert, besitzt also in $T_w X$ eine ONB aus Eigenvektoren. Es gibt daher $V_2 \perp V_1$, $|V_2| = 1$, und $S_w(V_2) = \varkappa_2(w) V_2$.

□

<u>Bemerkung</u>: Die letzte Feststellung im Beweis des Satzes gilt auch im Fall $\varkappa_1(w) = \varkappa_2(w)$. Dann hat der Eigenraum zu $\varkappa_1(w)$ die Dimension 2, also $S_w(V) = \varkappa_1(w) V$ auf $T_w X$. Gilt $\varkappa_1(w) = \varkappa_2(w)$,

so heißt w ein <u>Nabelpunkt der Fläche</u>. Im Fall $\mathcal{K}_1(w) = 0 = \mathcal{K}_2(w)$ wird w <u>Flachpunkt</u> genannt.

<u>Beispiele:</u> 1.) Für die durch $X(u,v) := R(\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$, $R>0$, $u \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $v \in (0, 2\pi)$ parametrisierte Sphäre mit Radius R haben wir gezeigt $\mathrm{II}_{(u,v)} = \frac{1}{R} \mathrm{I}_{(u,v)}$, d.h. alle Punkte sind Nabelpunkte mit Hauptkrümmungen $1/R$.

2.) Für jede parametrisierte Ebene ist $\mathrm{II} \equiv 0$, alle Punkte sind (wie es sein sollte,) Flachpunkte.

3.) Flachpunkte können auch im nicht-ebenen Fall auftreten: Sei $f(u,v) = u^4 + v^4$ und $X(u,v) = (u, v, f(u,v))$.

Wir haben gezeigt:

$$\mathrm{II}_{(u,v)} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}} D^2 f \Big|_{(u,v)}$$

In $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ ist aber $D^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, so dass

$\mathrm{II}_{(0,0)} \equiv 0$ und damit $\varkappa_1(0,0) = 0 = \varkappa_2(0,0)$.

⟨Übung: Berechnung von $\varkappa_1, \varkappa_2$ für weitere Bsple⟩

Satz 10: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ zusammenhängend und $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine Fläche. Ist jeder Punkt $w \in \Omega$ ein Nabelpunkt, so liegt $X(\Omega)$ in einer Ebene oder in einer Sphäre.

Beweis: Sei $S_w : T_w X \to T_w X$, $w \in \Omega$, die Weingarten-Abbildung. Nach Voraussetzung ist für alle $w \in \Omega$

$$\varkappa_1(w) = \lambda(w) = \varkappa_2(w),$$

d.h. $S_w(V) = \lambda(w) V \quad \forall w \in \Omega, V \in T_w X$.

Es gilt $V = V_1 X_u(w) + V_2 X_v(w)$ und damit

$$S_w(V) = V_1 S_w(X_u(w)) + V_2 S_w(X_v(w)) =$$

(Definition von S_w) $= - V_1 \, N_u(w) - V_2 \, N_v(w)$,

d.h.

$$\lambda(w)\left(V_1 X_u(w) + V_2 X_v(w)\right) =$$

$$- V_1 \, N_u(w) - V_2 \, N_v(w) \quad \forall w \in \Omega, \; V_1, V_2 \in \mathbb{R}$$

$$\Longleftrightarrow \quad V_1\left(\lambda(w) X_u(w) + N_u(w)\right) +$$

$$V_2\left(\lambda(w) X_v(w) + N_v(w)\right) = 0 \qquad \text{–//–}$$

Es folgt ⊛ $\quad -N_u = \lambda X_u, \; -N_v = \lambda X_v$,

also $\quad (\lambda X_u)_v = (\lambda X_v)_u$. Ausrechnen

ergibt $\quad \lambda_v X_u - \lambda_u X_v \equiv 0$, und da X_u, X_v überall linear unabhängig sind, gilt $\lambda_v = \lambda_u \equiv 0$,

also $\lambda(w) \equiv \lambda$, denn Ω ist zusammenhängend.

Fall 1: $\lambda = 0$

Dann ist $N_u = N_v \equiv 0$ nach obigen Gleichungen, die Gauß-Abbildung also konstant. Es folgt

$$(X\cdot N)_u = X_u \cdot N = 0,$$

$$(X\cdot N)_v = X_v \cdot N = 0,$$

mithin $X(w)\cdot N \equiv \text{const.}$ Es folgt $(X(w)-X(w_0))\cdot N = 0$, so dass $X(w)-X(w_0) \in N^\perp$ ist. Hier ist $w_0 \in \Omega$ beliebig fixiert. Dann hat aber X Bild in der Ebene durch $X(w_0)$ senkrecht zu N.

Fall 2: $\lambda \neq 0$

Dann betrachtet man die Abbildung $(u,v) \mapsto X(u,v) + \frac{1}{\lambda} N(u,v)$.

Aus ⊛ folgt $\left(X + \frac{1}{\lambda} N\right)_u = 0 = \left(X + \frac{1}{\lambda}N\right)_v$, also

$X(u,v) + \frac{1}{\lambda} N(u,v) \equiv Y_0 \in \mathbb{R}^3$. Das ergibt

$$|X(u,v) - Y_0| = \left|\frac{1}{\lambda} N(u,v)\right| = \frac{1}{|\lambda|},$$

Bild(X) ist enthalten in der Sphäre um Y_0 mit Radius $\frac{1}{|\lambda|}$.

$\square$

<u>Definition:</u> Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ mit den Hauptkrümmungen

$\varkappa_1, \varkappa_2 : \Omega \to \mathbb{R}$. Dann heißen

$$\boxed{H(w) := \frac{1}{2}\left(\varkappa_1(w) + \varkappa_2(w)\right), \quad K(w) := \varkappa_1(w)\varkappa_2(w)}$$

die <u>mittlere Krümmung</u> und die <u>Gauß-Krümmung</u> der Fläche X in w.

<u>Bemerkung:</u> Definiert man neben

$$I_w(V,W) = V \cdot W, \quad II_w(V,W) = S_w(V) \cdot W,$$

$w \in \Omega$, $V, W \in T_w X$ noch die <u>Dritte Fundamentalform</u>

$III_w(V,W) := S_w(V) \cdot S_w(W)$, so gilt die Formel

$$\boxed{III - 2H\, II + K\, I \equiv 0}$$

⟨<u>Übung:</u> Beweis!⟩

<u>Wir leiten Formeln für H und K ab:</u> Seien $w = (u_1, u_2)$ die Punkte aus Ω. Es seien

$$G = (g_{\alpha\beta})_{1\leq\alpha,\beta\leq 2} = \begin{pmatrix} \mathcal{E} & \mathcal{F} \\ \mathcal{F} & \mathcal{G} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} |X_{u_1}|^2 & X_{u_1}\cdot X_{u_2} \\ X_{u_1}\cdot X_{u_2} & |X_{u_2}|^2 \end{pmatrix}$$

und

$$B = (b_{\alpha\beta})_{1\leq\alpha,\beta\leq 2} = \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix}$$

$$\left(\mathcal{L} = N\cdot X_{u_1u_1},\ \mathcal{M} = N\cdot X_{u_1u_2},\ \mathcal{N} = N\cdot X_{u_2u_2} \right)$$

die Fundamentalmatrizen von I und II bzgl. e_1, e_2 (oder X_u, X_v). G ist invertierbar mit

$$G^{-1} = \frac{1}{W}\begin{pmatrix} \mathcal{G} & -\mathcal{F} \\ -\mathcal{F} & \mathcal{E} \end{pmatrix},\quad W := \mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2.$$

Die Ableitungen $N_{u_1}(w)$, $N_{u_2}(w)$ der Gauß-Abbildung liegen in T_wX (, denn $N\cdot N = 1 \Longrightarrow 0 = \frac{\partial}{\partial u_i}(N\cdot N)$ $= 2\, N_{u_i}\cdot N$, so dass $N_{u_i}(w) \in N(w)^{\perp} = T_wX$.), und da $X_{u_1}(w), X_{u_2}(w)$ eine Basis von T_wX ist, gibt es eindeutige Koeffizientenfunktionen $a_\alpha^\beta = a_\alpha^\beta(w)$ mit

$$(1) \qquad N_{u_\alpha} = \sum_{\beta=1}^{2} a_\alpha^\beta X_{u_\beta}, \quad \alpha = 1,2.$$

Es folgt:

$$N_{u_\alpha} \cdot X_{u_\gamma} = \sum_{\beta=1}^{2} a_\alpha^\beta X_{u_\beta} \cdot X_{u_\gamma} = \sum_{\beta=1}^{2} a_\alpha^\beta g_{\beta\gamma},$$

auf der linken Seite steht aber gerade $-b_{\alpha\gamma}$, d.h.

$$-b_{\alpha\gamma} = \sum_{\beta=1}^{2} a_\alpha^\beta g_{\beta\gamma}$$

Schreibt man $G^{-1} = (g^{ik})_{1\le i,k\le 2}$, so folgt:

$$-\sum_{\gamma=2}^{2} b_{\alpha\gamma} g^{\gamma\nu} =$$

$$\sum_{\gamma=2}^{2} \sum_{\beta=2}^{2} a_\alpha^\beta g_{\beta\gamma} g^{\gamma\nu} = a_\alpha^\nu .$$

Damit haben wir die Koeffizienten a_α^β aus (1) mit G und B ausgerechnet und die Weingarten-Gleichung

$$(2) \qquad \boxed{N_{u_\alpha} = -\sum_{\beta}^{2} b_\alpha^\beta X_{u_\beta}, \quad b_\alpha^\beta := \sum_{\gamma=1}^{2} b_{\alpha\gamma} g^{\gamma\beta}}$$

abgeleitet. Nach Satz 9 sind die Hauptkrümmungen die Eigenwerte von $S_w : T_w X \to T_w X$. Mit $V = \sum_{\alpha=1}^{2} V_\alpha X_{u_\alpha}(w)$, $W = \sum_{\alpha=1}^{2} W_\alpha X_{u_\alpha}(w) \in T_w X$ gilt:

$$(3) \quad S_w V = \varkappa V \iff S_w V \cdot W = \varkappa V \cdot W \quad \forall W \in T_w X,$$

und per Definition von S_w ist

$$S_w(V) = \sum_{\alpha=1}^{2} S_w(X_{u_\alpha}(w)) V_\alpha =$$

$$\sum_{\alpha=1}^{2} S_w(DX|_w(e_\alpha)) V_\alpha = -\sum_{\alpha=1}^{2} V_\alpha N_{u_\alpha}(w),$$

so dass (3) übergeht in

$$S_w V = \varkappa V \iff$$

$$\forall_{W_1, W_2 \in \mathbb{R}} \begin{cases} -\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} V_\alpha W_\beta N_{u_\alpha}(w) \cdot X_{u_\beta}(w) = \varkappa \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} V_\alpha W_\beta X_{u_\alpha}(w) \cdot X_{u_\beta}(w). \\ \iff -\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} V_\alpha W_\beta N_{u_\alpha}(w) \cdot X_{u_\beta}(w) = \varkappa \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} V_\alpha W_\beta g_{\alpha\beta}(w) \\ \iff + \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} b_{\alpha\beta}(w) V_\alpha W_\beta = \varkappa \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} g_{\alpha\beta}(w) V_\alpha W_\beta \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{\sum_{\alpha=1}^{2} b_{\alpha\beta}(w)\, V_\alpha = \varkappa \sum_{\alpha=1}^{2} g_{\alpha\beta}(w)\, V_\alpha}$$

Wegen der Symmetrie von G und B ist die Eigenwertgleichung $S_w V = \varkappa V$ äquivalent zum System

$$B\widetilde{V} = \varkappa G \widetilde{V}, \quad \widetilde{V} = (V_1, V_2) \in \mathbb{R}^2,$$

bzw. zu

$$(G^{-1}B)\widetilde{V} = \varkappa \widetilde{V},$$

so dass man zur Berechnung der Eigenwerte $\varkappa = \varkappa_1(w)$, $\varkappa_2(w)$ die Nullstellen des Polynoms

$$\boxed{\lambda \mapsto \det(G^{-1}B - \lambda \mathbb{1}), \quad \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

zu bestimmen hat. Somit ist gezeigt:

Satz 11: Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche. Die Hauptkrümmungen $\varkappa_1(w)$, $\varkappa_2(w)$ von X in $w \in \Omega$ sind die Nullstellen von $\lambda \mapsto \det(G^{-1}B - \lambda \mathbb{1})$, wobei